

ΑΛΓΕΒΡΑ – τελική εξέταση

(29/06/09)

1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ -2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 3\end{aligned}$$

- α) Να βρείτε τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα του παραπάνω συστήματος.
β) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τη λύση του συστήματος.
γ) Να βρείτε μια βάση για το χώρο S των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.

Απ:

α) Είναι:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 - r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 - r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 - r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

β) Επομένως θα είναι:
$$\begin{aligned}x_1 + \frac{7}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4 &= 2 & x_1 &= 2 - \frac{7}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 &= -1 & x_2 &= -1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\end{aligned}$$
, δηλαδή, δηλαδή το σύστημα είναι αόριστο

και, θέτοντας $x_3 = k$, $x_4 = m$, παρατηρούμε ότι το σύστημα παρουσιάζει διπαμετρική απειρία λύσεων της μορφής: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(2 - \frac{7}{2}k - \frac{7}{2}m, -1 + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m, k, m\right)$

γ) Με αντίστοιχες γραμμοπράξεις για το αντίστοιχο ομογενές σύστημα θα καταλήξουμε:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Επομένως, η λύση του θα είναι της μορφής: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{7}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4, \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, x_3, x_4\right)$

Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Για να ανήκει στο χώρο S των λύσεων του αντίστοιχου

ομογενούς συστήματος, θα πρέπει $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{7}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4, \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, x_3, x_4\right) = x_3 \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + x_4 \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)$

Τα $u_1 = \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $u_2 = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα κι επομένως το σύνολο $U = \{u_1, u_2\}$ αποτελεί μια βάση για το χώρο S των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.

Για τη γραμμική ανεξαρτησία των u_1, u_2 έχουμε:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0\right) + \lambda_2 \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2}\lambda_1 - \frac{7}{2}\lambda_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

2. Δίνονται τα σύνολα V_1, V_2, V_3, V_4 , όπου:

$$V_1 = \{(1, 0, -1), (2, 1, 3)\}$$

$$V_2 = \{(1, 0, -1), (2, 1, 3), (-4, -2, -6)\}$$

$$V_3 = \{(1, 0, -1), (2, 1, 3), (1, 1, 2)\}$$

$$V_4 = \{(1, 0, -1), (2, 1, 3), (1, 1, 2), (9, -2, 1)\}$$

α) Να βρείτε και να δικαιολογήσετε ποιο από τα παραπάνω σύνολα αποτελεί βάση για τον $\mathbb{R}^3$.

β) Να εκφράσετε τις συντεταγμένες του $u = (5, 1, -2)$ ως προς τη βάση που επιλέξατε.

Απ.:

α) Επειδή $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, τα V_1, V_4 δεν μπορούν να αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^3$: τα στοιχεία του V_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά δεν αρκούν για να παράγουν το χώρο, ενώ τα στοιχεία του V_4 αρκούν για να παράγουν το χώρο, αλλά είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού το πλήθος τους είναι μεγαλύτερο από $\dim(\mathbb{R}^3)$.

Επίσης, το V_2 δεν αποτελεί βάση, καθώς τα στοιχεία του είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(παρατηρήστε ότι: $(-4, -2, -6) = -2 \cdot (2, 1, 3)$)

Ελέγχουμε το σύνολο V_3 :

Αρκεί το σύστημα $\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(2, 1, 3) + \lambda_3(1, 1, 2) = (0, 0, 0)$ να έχει μοναδική λύση τη: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$.

Πράγματι, παρατηρήστε ότι $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = -2 \neq 0$, επομένως το ομογενές σύστημα ως προς τους αγνώστους

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ θα έχει μοναδική λύση, τη μηδενική. Εναλλακτικά μπορείτε να καταλήξετε στο ίδιο συμπέρασμα επιλύοντας το σύστημα με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Άρα βάση για τον $\mathbb{R}^3$ αποτελεί το σύνολο V_3 .

β) Αρκεί να βρούμε $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $c_1(1, 0, -1) + c_2(2, 1, 3) + c_3(1, 1, 2) = (5, 1, -2)$

Το σύστημα γράφεται και σε μορφή πινάκων σαν $A \cdot C = u$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Επιλύοντας το σύστημα με τη μέθοδο Cramer, θα βρούμε:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = -2$$

$$\det(A_{c_1}) = \det \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = -8 \quad \det(A_{c_2}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 0 \quad \det(A_{c_3}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = -2$$

επομένως $c_1 = \frac{\det(A_{c_1})}{\det(A)} = 4$, $c_2 = \frac{\det(A_{c_2})}{\det(A)} = 0$, $c_3 = \frac{\det(A_{c_3})}{\det(A)} = 1$, δηλαδή $[u]_{V_3} = (c_1, c_2, c_3) = (4, 0, 1)$.

Εναλλακτικά μπορείτε να εργαστείτε με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

3. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, της οποίας ο πίνακας ως προς τη standard βάση $E = \{e_1, e_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$ είναι ο $A_E = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

α) Να βρείτε μια διαγωνοποίηση για τον πίνακα A_E .

β) Να βρείτε τον πίνακα της T , A_S , ως προς τη βάση $S = \{s_1, s_2\} = \{2e_2, e_1 - 2e_2\}$.

Απ.:

α) Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A_E : $\det(A_E - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 7 \\ 1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -5$

Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του A_E :

- Για $\lambda_1=3$: $\begin{bmatrix} 2-\lambda_1 & 7 \\ 1 & -4-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 7x_2 = 0 \\ x_1 - 7x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 7x_2$

επομένως $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ και το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 είναι το: $u_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Για $\lambda_2=-5$: $\begin{bmatrix} 2-\lambda_2 & 7 \\ 1 & -4-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7x_1 + 7x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2$

επομένως $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2 είναι το: $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα $P = [u_1 \ u_2] = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και τον $P^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$.

Επομένως, μια διαγωνοποίηση του A_E είναι η $\Delta = P^{-1} \cdot A_E \cdot P$.

Πράγματι:

$$\underbrace{\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{A_E} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_P = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}}_{\Delta}$$

β)

Α' τρόπος:

Ως γνωστόν, $A_E = \begin{bmatrix} [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E \end{bmatrix}$. Επομένως: $[T(e_1)]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2e_1 + e_2$ και $[T(e_2)]_E = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} = 7e_1 - 4e_2$.

Για να βρούμε τον A_S , αρκεί να βρούμε το αποτέλεσμα της δράσης του T σε κάθε διάνυσμα της βάσης του S , δηλαδή τα $T(s_1)$, $T(s_2)$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\{s_1, s_2\} = \{2e_2, e_1 - 2e_2\}$, δηλαδή ότι $s_1=2e_2$ και $s_2=e_1-2e_2$, καθώς επίσης και ότι ο T είναι γραμμική απεικόνιση, δηλαδή ότι ισχύει: $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$, θα είναι:

$$T(s_1) = T(2e_2) = 2T(e_2) = 2(7e_1 - 4e_2) = 14e_1 - 8e_2 = [T(s_1)]_E$$

$$T(s_2) = T(e_1 - 2e_2) = T(e_1) - 2T(e_2) = (2e_1 + e_2) - 2(7e_1 - 4e_2) = -12e_1 + 9e_2 = [T(s_2)]_E$$

Τα $T(s_1)$, $T(s_2)$ στην παραπάνω μορφή είναι εκφρασμένα ως προς τη standard βάση. Για να εκφραστούν ως προς την S , αρκεί να εκφράσουμε τα e_1, e_2 ως προς s_1, s_2 .

Είναι: $\begin{cases} s_1 = 2e_2 \\ s_1 = e_1 - 2e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = s_1 + s_2 \\ e_2 = \frac{1}{2}s_1 \end{cases}$, οπότε αντικαθιστώντας θα βρούμε:

$$\begin{aligned} T(s_1) &= 14e_1 - 8e_2 = 14(s_1 + s_2) - 8\left(\frac{1}{2}s_1\right) = 10s_1 + 14s_2 = [T(s_1)]_s \\ T(s_2) &= -12e_1 + 9e_2 = -12(s_1 + s_2) + 9\left(\frac{1}{2}s_1\right) = -\frac{15}{2}s_1 - 12s_2 = [T(s_2)]_s \end{aligned}$$

, δηλαδή $A_s = \begin{bmatrix} [T(s_1)]_s & [T(s_2)]_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -\frac{15}{2} \\ 14 & -12 \end{bmatrix}$

Β' τρόπος:

Εργαστείτε με τον πίνακα αλλαγής βάσης.

Επειδή $\begin{cases} s_1 = 2e_2 = 0e_1 + 2e_2 \\ s_1 = e_1 - 2e_2 = 1e_1 - 2e_2 \end{cases}$, εύκολα βλέπουμε ότι $P_{E \rightarrow S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Από τον $P_{E \rightarrow S}$ βρίσκουμε: $Q_{S \rightarrow E} = (P_{E \rightarrow S})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(P_{E \rightarrow S})} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Εναλλακτικά: $\begin{cases} s_1 = 2e_2 \\ s_1 = e_1 - 2e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = s_1 + s_2 = 1s_1 + 1s_2 \\ e_2 = \frac{1}{2}s_1 = \frac{1}{2}s_1 + 0s_2 \end{cases}$ και $Q_{S \rightarrow E} = \begin{bmatrix} [T(e_1)]_s & [T(e_2)]_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Επομένως θα είναι: $A_s = Q_{S \rightarrow E} \cdot A_E \cdot P_{E \rightarrow S} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -\frac{15}{2} \\ 14 & -12 \end{bmatrix}$.